

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 13.02.2010**

**SUBIECTE - clasa a V-a:**

**I.** Comparați numerele:  $a = (8^5 + 25^3 - 7^{35} : 7^{20}) : (2^{15} - 7^{15} + 5^6) \cdot 3^{26}$  și  
 $b = 2^{101} : [(5^{171} : 5^{170} - 3)^{98} + 2^{105} : (2^3 \cdot 2^4) + (2^{11})^9] \cdot 2^{38}$ .

**II.** Un număr natural se termină în 0 și se micșorează cu 72504 dacă îi ștergem ultima cifră. Aflați numărul și explicați cum l-ați găsit.

**III.** Broscuțele Speedy, Oac și Froggy participă la o cursă pe axa numerelor. Ele sunt așezate inițial, în această ordine, pe pozițiile corespunzătoare numerelor 0, 1, respectiv 2 și sar respectând următoarea regulă: *ultima broscuță sare peste cele din fața ei, făcând un salt de lungime egală cu dublul distanței dintre ea și prima broscuță*. Astfel, prima sare broscuța Speedy, care aterizează pe poziția 4, deci după prima săritură broscuțele vor fi pe axa numerelor pe pozițiile 1, 2, 4. După cea de-a doua săritură broscuțele vor fi pe pozițiile 2, 4, 7 și așa mai departe.

- Care sunt pozițiile ocupate de broscuțe după 6 sărituri?
- Știind că la un moment dat cele trei broscuțe se află pe pozițiile 986, 1596, 2583, stabiliți (justificând răspunsul) care broscuță se află în acel moment pe primul loc.

(Prelucrare după UCT Math. Competition 2009)

**IV.** La o reuniune la care au participat 148 de elevi (băieți și fete), băieții au adus flori pentru a le oferi fetelor: primul băiat a adus 5 flori, al doilea 6 flori, al treilea 7 flori și așa mai departe, până la ultimul, care a adus un număr de flori egal cu numărul fetelor.

- Câți băieți și câte fete au participat la reuniune?
- Arătați că numărul total al florilor aduse de băieți este pătrat perfect.

(Prelucrare după Gazeta Matematică 2009)

*Probleme selectate de prof. Maria Miheț, Școala cu cls. I-VIII nr. 24 Timișoara  
Vizat, prof. Petria-Elena Boldea, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș*

**succes!**

**NOTĂ:**

- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Timpul de lucru este de trei ore.
- Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 puncte.

**BAREM DE CORECTARE – clasa a V-a, 13.02.2010**

**I. Se acordă din oficiu** 1p

$a = 3^{26}$  3p

$b = (2^{101} : 2^{100}) \cdot 2^{38} = 2^{39}$  3p

$a = 9^{13} > 8^{13} = b$  3p

**TOTAL: 10p**

**II. Se acordă din oficiu** 1p

Notăm cu  $n$  numărul obținut prin ștergerea ultimei cifre.

Numărul inițial este  $N=10n$ , deci  $9n=72504$ . 6p

Rezultă  $n=8056$  și  $N=80560$  3p

**TOTAL: 10p**

**III. Se acordă din oficiu** 1p

**a)** După cea de-a 3-a săritură broscuțele se găsesc pe pozițiile (4, 7, 12),

apoi pe pozițiile (7, 12, 20), (12, 20, 33),

iar după cea de-a a șasea pe pozițiile (20, 33, 54)

(se observă că dacă broscuțele ocupă pozițiile  $a, b, c$ , atunci  $c=a+b+1$ ) 5p

**b)** Broscuța de pe primul loc se află pe axă în dreptul numărului 2583, care este impar. Observăm că după fiecare săritură numărul care indică poziția unei broscuțe pe axa numerelor crește cu un număr par, deci paritatea pozițiilor inițiale nu se modifică pe parcurs (adică o broscuță se află în orice moment pe un număr de aceeași paritate cu cel de pe poziția inițială). Deoarece Oac este singura broscuță aflată la început pe o poziție impară, ea este broscuța de pe primul loc 4p

**TOTAL: 10p**

**IV. Se acordă din oficiu** 1p

**a)** Notăm cu  $b$  numărul băieților și cu  $f$  numărul fetelor.

Primul băiat aduce  $4+1$  flori, al doilea  $4+2$  flori, etc, iar ultimul  $4+b$  flori, deci  $4+b=f$  3p

Cum  $b+f=148$ , rezultă că  $b=72$ ,  $f=76$  (3p)

**b)** Numărul de flori este  $5+6+\dots+76=81+81+\dots+81$  (36 de termeni)  $=36 \cdot 81 = (6 \cdot 9)^2$  3p

**TOTAL: 10p**

**NOTĂ:** Orice altă soluție corectă se punctează echivalent !

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 13.02.2010**

**SUBIECTE-clasa a VI-a:**

- I.** a) Fie  $p$  un număr prim mai mare decât 6. Aflați ultima cifră a lui  $p^4$ .  
b) Aflați numerele prime  $p$  și  $q$  știind că  $p^4 + q^4 = 29186$ .

*G.M.10/2009*

- II.** Să se afle numerele naturale  $a$  și  $b$  știind că  $[a,b] - (a,b) = 34$ .

*R.M.T.*

- III.** Fie segmentul  $A_1A_2$  de lungime 1. Segmentul  $A_2A_3$  are lungimea  $\frac{3}{10}$  din  $A_1A_2$ , segmentul  $A_3A_4$  are lungimea  $\frac{3}{10}$  din  $A_2A_3$  și așa mai departe. Să se arate că:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + \dots + A_nA_{n+1} < \frac{10}{7}.$$

*Prelucrare Luminița Popescu*

- IV.** În triunghiul  $ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  și  $[AB] \equiv [AC]$  se consideră punctele  $M \in (BC)$ ,  $N \in (AB)$  și  $Q \in (AC)$  astfel încât  $[AB] \equiv [BM]$ ,  $[CM] \equiv [BN]$  și  $[BC] \equiv [AQ]$ .  
Demonstrați că:

- a) Triunghiul  $AMN$  este isoscel.  
b) Punctele  $N, M, Q$  sunt coliniare

*Prelucrare Luminița Popescu*

*Probleme selectate de prof. Luminița Popescu, Școala cu cls. I-VIII nr.6 Timișoara  
Vizat, prof. Petria-Elena Boldea, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș*

**SUCCES!**

**NOTĂ:**

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 puncte.

**BAREM DE CORECTARE-clasa a VI-a, 13.02.2010**

- I.** Se acordă din oficiu .....1p
- a)**  $p = \text{prim}; p > 6 \Rightarrow u(p) \in \{1; 3; 7; 9\}$  .....1p
- $u(p) = 1 \Rightarrow u(p^4) = 1; u(p) = 3 \Rightarrow u(p^4) = 1; u(p) = 7 \Rightarrow u(p^4) = 1; u(p) = 9 \Rightarrow u(p^4) = 1$  .....2p
- $\Rightarrow u(p^4) = 1$  .....0,5p
- b)** Cazul 1:  $p > 6; q > 6 \Rightarrow$  nu avem soluții .....0,5p
- Cazul 2:  $p < 6; q < 6 \Rightarrow$  nu avem soluții .....0,5p
- Cazul 3:  $p > 6; q < 6 \Rightarrow u(p^4) = 1; u(29186) = 6 \Rightarrow u(q^4) = 5$  .....1p
- $q = \text{prim} \Rightarrow q = 5 \Rightarrow q^4 = 625$  .....1p
- $\Rightarrow p^4 = 28561$  .....0,5p
- $\Rightarrow p^4 = 13^4$  .....1p
- $\Rightarrow p = 13$  .....1p

**TOTAL: 10p**

- II.** Se acordă din oficiu .....1p
- Presupunem:  $a = dx$  și  $b = dy \Rightarrow (a, b) = d$  și  $(x, y) = 1$  .....1p
- Relatia  $[a, b] - (a, b) = 34$  devine  $dxy - d = 34 \Rightarrow d(xy - 1) = 34$  .....1p
- $\Rightarrow d \in \{1; 2; 17; 34\}$  .....1p
- Pt.  $d = 1 \Rightarrow (a, b) \in \{(1; 35), (35; 1), (5; 7), (7; 5)\}$  .....1,5p
- Pt.  $d = 2 \Rightarrow (a, b) \in \{(2; 36), (36; 2), (4; 18), (18; 4)\}$  .....1,5p
- Pt.  $d = 17 \Rightarrow (a, b) \in \{(17; 51), (51; 17)\}$  .....1,5p
- Pt.  $d = 34 \Rightarrow (a, b) \in \{(34; 68), (68; 34)\}$  .....1,5p

**TOTAL: 10p**

- III.** Se acordă din oficiu .....1p

Avem  $A_1 A_2 = 1$

$$A_2 A_3 = \frac{3}{10} \cdot A_1 A_2 = \frac{3}{10} \cdot 1 = \frac{3}{10} \dots\dots\dots 0,5p$$

$$A_3 A_4 = \frac{3}{10} \cdot A_2 A_3 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$A_4 A_5 = \frac{3}{10} \cdot A_3 A_4 = \left(\frac{3}{10}\right)^3 \dots\dots\dots 0,5p$$

...

$$A_n A_{n+1} = \frac{3}{10} \cdot A_{n-1} A_n = \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + \dots + A_n A_{n+1} = 1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Notăm: } S = 1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$\frac{3}{10} S = \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{10}\right)^n \dots\dots\dots 1p$$

$$S - \frac{3}{10} S = 1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n < 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10} S < 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow S < \frac{10}{7} \Rightarrow A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + \dots + A_n A_{n+1} < \frac{10}{7} \dots\dots\dots 1p$$

**TOTAL: 10p**

IV. Se acordă din oficiu.....	1p
a) justifică $\angle B \equiv \angle C$ .....	0,5p
justifică $[AC] \equiv [BM]$ .....	0,5p
$\triangle ACM \equiv \triangle MBN \Rightarrow [AM] \equiv [BM]$ .....	1p
finalizare.....	0,5p
b) justifică $m(\angle ACM) = m(\angle ABC) = 45^\circ$ .....	0,5p
$\Rightarrow m(\angle QCM) = 135^\circ$ .....	0,5p
$[MC] \equiv [QC] \Rightarrow \triangle MCQ = \triangle isoscel$ .....	1p
justifică $m(\angle CQM) = m(\angle CMQ) = 22^\circ 30'$ .....	1p
$m(\angle CAM) = m(\angle NMB) = x \Rightarrow m(\angle MAN) = m(\angle MNA) = 90^\circ - x$ .....	1p
$\Rightarrow m(\angle MNB) = 90^\circ + x$ .....	0,5p
$m(\angle BMN) + m(\angle MNB) + m(\angle NBM) = 180^\circ$ .....	0,5p
$\Rightarrow m(\angle NMB) = 22^\circ 30'$ .....	0,5p
$\Rightarrow m(\angle NMB) = m(\angle CMQ) \Rightarrow BC \cup NQ = \{M\}$ .....	0,5p
$\Rightarrow N, M, Q$ coliniare.....	0,5p

**TOTAL: 10p**

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se punctează echivalent !

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 13.02.2010**

**SUBIECTE –CLASA a VII-a**

**I.** a) Arătați că  $a = \sqrt{19^{n+1} + 74^{n+1}}$  este irațional oricare ar fi  $n \in \mathbf{N}$ .

*Nicolița Scripnicu*

b) Arătați că dacă  $x, y \in \mathbf{R}^*$  astfel încât  $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2$ , atunci  $\frac{3x+4y}{4x+3y} \in \mathbf{Z}$ .

*G.M./2009*

**II.** a) Să se determine numerele naturale  $a, b, c, d$  astfel încât numerele

$$\frac{a}{b+c+d}, \frac{b}{c+d+a}, \frac{c}{d+a+b}, \frac{d}{a+b+c} \text{ să fie naturale.}$$

*R.M.T.*

b). Arătați că:

$$\sqrt{2009 \cdot 2010 + \sqrt{2009 \cdot 2010 + \sqrt{2009 \cdot 2010}}} < 2010.$$

*Nicolița Scripnicu*

**III.** În triunghiul ABC, punctele M și N sunt mijloacele laturilor (AB) respectiv (AC), iar E și F sunt mijloacele segmentelor (AM) respectiv (AN). Fie  $R \in (BF)$  astfel încât  $\frac{RF}{FB} = \frac{1}{3}$ ,  $F \in (BR)$ ,  $Q \in (CE)$  astfel

încât  $\frac{QE}{EC} = \frac{1}{3}$ ,  $E \in (CQ)$ ,  $\{D\} = MN \cap BR$ ,  $\{H\} = MN \cap CQ$ .

a) Demonstrați că punctele Q, A și R sunt coliniare.

b) Arătați că D este simetricul lui R față de F, iar (BR) și (CQ) au mijloacele pe MN.

*Mihai Ciobanu – Exerciții și probleme de matematică*

**IV.** Fie MATR trapez cu  $MA \parallel RT$  și diagonalele perpendiculare.

a) Arătați că  $MA+RT < RM+AT$ .

b) Dacă în plus (RA este bisectoarea unghiului MRT, demonstrați că MATR este romb.

*Nicolița Scripnicu*

*Probleme selectate de profesor Nicolița Scripnicu, Colegiul Național Bănățean Timișoara  
Vizat, prof. Petria-Elena Boldea, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș*

**succes!**

**NOTĂ:**

- 1) Timpul de lucru este de 3 ore.
- 2) Toate subiectele sunt obligatorii.
- 3) Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10.

# BAREM DE CORECTARE – clasa a VII-a, 13.02.2010

- I. Se acordă din oficiu** ..... 1p  
**a)** Dacă  $n$  = par, u.c.  $=u(9+4)=3$  (1) ..... 1p  
 Dacă  $n$  , impar, U.C= $u(1+6)=7$  (2) .....1p  
 Din (1) și (2)  $\Rightarrow 19^{n+1} + 74^{n+1}$  nu este pătrat perfect  $\Rightarrow a$  este irațional ..... 1p

- b)**  $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2 \Leftrightarrow (5x^3 - 5xy^2) + (2x^2y - 2y^3) = 0$   
 și obține  $(x^2 - y^2)(5x + 2y) = 0$ ..... 2p  
 Deduce  $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$  ..... 1p  
 sau  $5x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5x}{2}$  ..... 1p  
 Analizează:  $y = x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow \frac{3x+4y}{4x+3y} = \dots = 1 \in \mathbf{Z}$  ..... 0,5p  
 $y = -x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow \frac{3x+4y}{4x+3y} = \dots = -1 \in \mathbf{Z}$  ..... 0,5p  
 $y = -\frac{5x}{2} \in \mathbf{R}^* \Rightarrow \frac{3x+4y}{4x+3y} = \dots = 2 \in \mathbf{Z}$  ..... 1p

## TOTAL 10p

- II. Se acordă din oficiu** ..... 1p  
**a)** Din motive de simetrie, putem presupune că cel mai mic dintre numere este  $a$ .

Dacă  $a \neq 0$ , atunci  $\frac{a}{b+c+d} \leq \frac{a}{a+a+a} = \frac{1}{3}$ , imposibil. Deci  $a = 0$  . ..... 2p

Numerele  $\frac{b}{c+d}$ ,  $\frac{c}{d+b}$ ,  $\frac{d}{b+c}$  trebuie să fie naturale ..... 1p

Putem presupune că  $b \leq c$  și  $b \leq d$ .

Dacă  $b \neq 0$ , atunci  $\frac{b}{c+d} \leq \frac{b}{b+b} = \frac{1}{2}$ , imposibil. Deci  $b = 0$  ..... 1p

Cum  $\frac{c}{d}$  și  $\frac{d}{c}$  sunt naturale, trebuie ca  $c = d (\neq 0)$ . ..... 1p

**b)**  $\sqrt{2009 \cdot 2010} < \sqrt{2010 \cdot 2010}$  ..... 1p

$\sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2009 \cdot 2010} < \sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2010 \cdot 2010}$  1p

$\sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2009 \cdot 2010} + 2010 = \sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2010 \cdot 2010} = \sqrt{2010 \cdot 2010} = 2010$  2p

## TOTAL 10p

- III. Se acordă din oficiu** ..... 1p

**a)**  $MN \parallel BC$ ,  $EF \parallel MN$  iar  $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} = \frac{QE}{EC} \Rightarrow AQ \parallel BC$  (1) ..... 2p

Analog  $\frac{AF}{FC} = \frac{RF}{FB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AR \parallel BC$  (2) ..... 2p

Din (1) și (2)  $\Rightarrow Q, A, R$  coliniare. .... 1p

**b)** În triunghiul  $BEF$ ,  $MD \parallel EF \Rightarrow \frac{BM}{ME} = \frac{BD}{DF} = \frac{2}{1}$  ..... 1p

$\Rightarrow BD = 2DF$  adică  $DF = \frac{FB}{3} \Rightarrow DF = RF$ . ..... 2p

Analog  $HE = EQ$ , deci  $D$  - mijlocul lui  $[BR]$ , iar  $H$  - mijlocul lui  $[CQ]$ . .... 1p

## TOTAL 10p

IV. Se acordă din oficiu ..... 1p

a) Notăm  $\{O\} = MT \cap AR$  și  $(EF)$  linie mijlocie în trapez.

În triunghiul  $OEF$  avem  $EF < OE + OF$  ..... 1p

$$EF = \frac{MT + MA}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$OE = \frac{RM}{2} \text{ și } OF = \frac{TA}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow RT + MA < RM + TA \dots\dots\dots 1p$$

b)  $[RO]$  – înălțime și bisectoare în  $\Delta MRT \Rightarrow [MR] \equiv [RT]$  (1) ..... 1p

$\angle TRA \equiv \angle RAM$  (alt.int.) și  $\angle TRA \equiv \angle ARM \Rightarrow \angle RAM \equiv \angle ARM \Rightarrow \Delta AMR$  isoscel cu  $[RM] \equiv [AM]$  (2) ..... 2p

Din (1) și (2)  $\Rightarrow [RT] \equiv [MA]$  și cum  $MA \parallel RT \Rightarrow MATR$  este paralelogram ..... 1p

(1)  
 $\Rightarrow MATR$  este romb ..... 1p

**TOTAL 10p**

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se punctează echivalent !



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 13.02.2010**

**SUBIECTE - clasa a VIII-a:**

**I. a)** Fie  $n = [\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] + \dots + [\sqrt{2009 \cdot 2010}]$  și  $A = \left\{ x \in \mathbf{Z} \mid \frac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{(3x+2)(3+\sqrt{2})} \in \mathbf{Z} \right\}$ , unde

$[x]$  notează partea întreagă a numărului real  $x$ . Să se compare numerele  $n^m$  și  $m^n$  dacă  $m =$  numărul de elemente ale mulțimii  $A$ .

**b)** Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $6n+7$  și  $9n+1$  sunt pătrate perfecte consecutive.

*R.M.T.*

**II. a)** Să se arate că:

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30}}}} < 11$$

*Ioan Miclea*

**b)** Numerele reale  $x$  și  $y$  verifică relația  $x + 2y = 5$ . Aflați valoarea minimă a expresiei

$$E(x, y) = x^2 + y^2.$$

*Prelucrare G.M.*

**III.** Fie  $M$  un punct exterior planului patrulaterului convex  $ABCD$ . Dacă  $G_1$  și  $G_2$  sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABC$  și  $BCD$  iar  $d = (MAD) \cap (MG_1G_2)$ , să se arate:

- a)  $G_1G_2 \parallel AD$
- b)  $d \parallel (ABC)$

**IV.** Fie  $ABCD A'B'C'D'$  – paralelipiped dreptunghic cu  $AB = a$ ,  $BC = b$  și  $AA' = c$ .

- a) Să se calculeze în funcție de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  distanța de la  $B$  la planul  $(AB'C)$
- b) Fie  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$  centrele fețelor  $DCC'D'$ ,  $BCC'B'$  și  $ABCD$ . Să se arate că

$$[A'O_1] \equiv [DO_2] \equiv [C'O_3] \text{ dacă și numai dacă } BD' = \sqrt{ab + bc + ca}.$$

*Prelucrare Ioan Miclea*

*Probleme selectate de profesor Miclea Ioan, Școala de Arte Frumoase "Filaret Barbu" Lugoj  
Vizat, prof. Petria-Elena Boldea, inspector școlar de specialitate - I.S.J. Timiș*

**succes!**

**NOTĂ:**

- 4. Toate subiectele sunt obligatorii.
- 5. Timpul de lucru este de trei ore.
- 6. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 10 puncte.

**BAREM DE CORECTARE – clasa a VIII-a, 13.02.2010**

**I. Se acordă din oficiu .....1p**

**a)** Din inegalitatea  $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [\sqrt{k(k+1)}] = k$  .....1p

Deci  $n = 1 + 2 + \dots + 2009 = \frac{2009 \cdot 2010}{2} = 2009 \cdot 1005$  .....1p

$$\frac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{(3x+2)(3+\sqrt{2})} = \frac{2(3+\sqrt{2})}{(3x+2)(3+\sqrt{2})} = \frac{2}{3x+2} \dots\dots\dots 1p$$

$3x+2 \mid 2 \Rightarrow A = \{0, -1\} \Rightarrow \text{card}A = 2$  .....1p

$2^{2009 \cdot 1005} > 2^{42} = (2^{11} \cdot 2^{10})^2 = (2048 \cdot 1024)^2 > (2009 \cdot 1005)^2 \Rightarrow m^n > n^m$  ....1p

**b)** Notăm  $6n + 7 = k^2$  și  $9n + 1 = (k+1)^2, k \in \mathbb{Z}$ .

$\Rightarrow n = \frac{k^2 - 7}{6}$ , respectiv  $n = \frac{(k+1)^2 - 1}{9}$  ..... 1p

$\Rightarrow \frac{k^2 - 7}{6} = \frac{(k+1)^2 - 1}{9} \Leftrightarrow k^2 - 4k - 21 = 0$  ..... 1p

Din  $(k-7)(k+3)=0$  obține soluțiile  $k \in \{-3; 7\}$  ..... 1p

Pentru  $k = -3$  se obține  $n \notin \mathbb{N}$  (nu convine condiției din enunț) ..... 0,5p

Pentru  $k = 7$  se obține  $n = 7$  ..... 0,5p

**TOTAL 10p**

**II. Se acordă din oficiu .....1p**

**a)**  $a = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}} < \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}}} =$   
 $= \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}} = \sqrt{20 + \sqrt{25}} = \sqrt{25} = 5$  .....2p

$b = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30}}}} < \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{36}}}} =$   
 $= \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{36}}} = \sqrt{30 + \sqrt{36}} = \sqrt{36} = 6$  .....2p  
 $\Rightarrow a + b < 11$  .....1p

**b)**  $x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$  .....1p

$E(x, y) = (5 - 2y)^2 + y^2 = 25 - 20y + 5y^2 =$   
 $= 5(5 - 4y + y^2) = 5[1 + (2 - y)^2]$  .....2p

$\min E(x, y) = 5$  (și se obține pentru  $y = 2$  și  $x = 1$ ) .....1p

**TOTAL 10p**

**III. Se acordă din oficiu .....1p**

Desen .....1p

**a)** Fie  $M'$  – mijlocul laturii  $[BC]$ . Atunci  $\frac{M'G_1}{M'A} = \frac{M'G_2}{M'D} = \frac{1}{3}$  .....2p

Din reciproca teoremei lui Thales in  $\Delta M'AD \Rightarrow G_1G_2 \parallel AD$  .....1p

**b)** Prin metoda reducerii la absurd(sau cu lema “acoperișului”) arată că

$d \parallel G_1G_2 \parallel AD$  .....2p

$M \notin (ABC), M \in d \Rightarrow d \not\subset (ABC)$  .....1p

Din  $d \parallel AD$  și  $AD \subset (ABC) \Rightarrow d \parallel (ABC)$  .....2p

**TOTAL 10p**

IV. Se acordă din oficiu .....1p

Desen .....1p

a) Dacă  $BM \perp AC, M \in (AC) \Rightarrow$  din teorema celor 3 perpendiculare  $B'M \perp AC$ .

Dacă  $BQ \perp B'M$ , conform reciprocei a doua a teoremei celor 3 perpendiculare

$\Rightarrow BQ \perp (AB'C) \Rightarrow BQ = d[B, (AB'C)]$  .....2p

$$AC = \sqrt{a^2 + b^2}, BM = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, B'M = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow BQ = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}} \dots\dots\dots 1p$$

$$b) [A'O_1] \equiv [DO_2] \equiv [C'O_3] \Leftrightarrow b^2 + \frac{a^2 + c^2}{4} = a^2 + \frac{b^2 + c^2}{4} = c^2 + \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \text{paralelipipedul este cub (1)} \dots\dots\dots 2p$$

$$BD' = \sqrt{ab + ac + bc} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \text{paralelipipedul este cub (2)} \dots\dots\dots 1p$$

Cele două afirmații sunt echivalente din (1) și (2).....1p

**TOTAL 10p**

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se punctează echivalent !